3.4 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Μήκος τόξου : Το μήκος ℓ ενός τόξου μ^o δίνεται από τον τύπο $\ell = 2\pi\rho\cdot\frac{\mu}{360}$ όπου ρ η ακτίνα του κύκλου στον οποίο ανήκει και π ο γνωστός αριθμός.

2.

Το ακτίνιο (rad): Ονομάζουμε τόξο ενός ακτινίου (rad) το τόξο του οποίου το μήκος είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου στον οποίο το τόξο ανήκει

3.

Μήκος τόξου α rad : Το μήκος ℓ ενός τόξου α ακτινίων είναι ίσο με $\ell = \alpha\rho$ όπου ρ η ακτίνα του κύκλου στον οποίο βρίσκεται το τόξο

4.

Σχέση μοιρών – ακτινίων : $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, όπου μ το μέτρο ενός τόξου σε μοίρες και α το μέτρο του ίδιου τόξου σε ακτίνια

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Μετατροπή μοιρών σε rad : Χρησιμοποιούμε το 4 της θεωρίας βάζοντας όπου μ το δοθέν μέτρο σε μοίρες και λύνουμε ως προς α
Συνήθως το π το αφήνουμε π και δεν το αντικαθιστούμε με το 3,14

2.

Μετατροπή rad σε μοίρες : Αν γνωρίζουμε το μέτρο ενός τόξου σε rad ως συνάρτηση του π, για να το βρούμε σε μοίρες βάζουμε όπου π το 180 και κάνουμε πράξεις,
ή αλλιώς στη θέση του α στο (4) της θεωρίας βάζουμε το δοθέν μέτρο και λύνουμε ως προς μ

3.

Ειδικά τόξα : Ο κύκλος είναι τόξο **360^o ή 2π** rad
Το ημικύκλιο είναι τόξο **180^o ή π** rad
Το τεταρτοκύκλιο είναι τόξο **90^o ή $\frac{\pi}{2}$** rad

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να βρείτε το μήκος ενός τόξου το οποίο αντιστοιχεί στην πλευρά ενός κανονικού δεκαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας ρ = 8.

Θεωρία

Προτεινόμενη λύση

Η κεντρική γωνία ω του κανονικού δεκαγώνου είναι ίση με $\omega = \frac{360^o}{10} = 36^o$

Επομένως το τόξο που αντιστοιχεί στην πλευρά του δεκαγώνου έχει μέτρο $\mu = 36^o$

Το μήκος του είναι ίσο με $\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360} = 2\cdot 3{,}14\cdot 8\frac{36}{360} = 5{,}024$

2.

Σε ένα κύκλο, ένα τόξο 6^o έχει μήκος 12,56 cm. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου στον οποίο ανήκει.

Προτεινόμενη λύση

$\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360}$ άρα $12{,}56 = 2\cdot 3{,}14\cdot \rho\frac{6}{360}$ οπότε ρ = 120cm

Το μήκος L του κύκλου είναι ίσο με $L = 2\pi\rho = 2\cdot 3{,}14\cdot 120 = 753{,}6$ cm

3.

Ένας κύκλος έχει μήκος 18π. Να βρείτε το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε τόξο μήκους 6π.

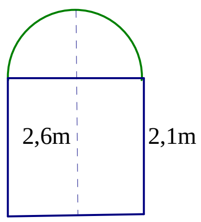
Προτεινόμενη λύση

$L = 18\pi$ οπότε $2\pi\rho = 18\pi$ συνεπώς $\rho = 9$

$\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360}$ άρα $6\pi = 2\pi\cdot 9\frac{\mu}{360}$ απ' όπου προκύπτει ότι $\mu = 120^o$

4.

Να βρείτε την περίμετρο της πόρτας του διπλανού σχήματος.



Προτεινόμενη λύση

Η ακτίνα ρ του ημικυκλίου του πάνω μέρους της πόρτας είναι ίση με $\rho = 2{,}6 - 2{,}1 = 0{,}5$ m.

Οπότε το μήκος του ημικυκλίου είναι ίσο με $\frac{2\pi\rho}{2} = \pi\rho =$

$= 3{,}14\cdot 0{,}5 =$

$= 1{,}57$ m

Η περίμετρος της πόρτας είναι ίση με : $2{,}1 + 1{,}57 + 2{,}1 + 2\cdot 0{,}5 = 6{,}77$m

5.

Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Τόξο σε rad	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Τόξο σε μοίρες	120^o	135^o	$22{,}5^o$	270^o	30^o	45^o	60^o

Προτεινόμενη λύση

Σχόλια 1-2
Θεωρία 4

$\frac{2\pi}{3}\text{rad} = \frac{2\cdot 180^o}{3} = 120^o$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{4}\text{ rad} = \frac{3\cdot 180^o}{4} = 135^o$

$\frac{\pi}{8}\text{rad} = \frac{180^o}{8} = 22{,}5^o$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{2}\text{rad} = \frac{3\cdot 180^o}{2} = 270^o$

Από τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, για $\mu = 30^o$ βρίσκουμε $\frac{30}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ οπότε $\alpha = \frac{\pi}{6}\text{rad}$

$\mu = 45^o$ βρίσκουμε $\alpha = \frac{\pi}{4}\text{rad}$

$\mu = 60^o$ βρίσκουμε $\alpha = \frac{\pi}{3}\text{rad}$

Συμπληρωμένος ο πίνακας φαίνεται παραπάνω

6.

Σε κύκλο ακτίνας ρ = 2 cm, ένα τόξο έχει μήκος 1,256cm. Να βρείτε το μέτρο του τόξου σε μοίρες και rad.

Προτεινόμενη λύση

$\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360}$ οπότε $1{,}256 = 2\cdot 3{,}14\cdot 2\,\frac{\mu}{360}$ απ' όπου βρίσκουμε ότι $\mu = 36^o$

Από τον τύπο $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$, για $\mu = 36^o$ βρίσκουμε $\frac{36}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ οπότε $\alpha = \frac{\pi}{5}\text{rad}$

7.

Σε μία ευθεία να πάρετε τα διαδοχικά σημεία Α , Β και Γ. Να γράψετε τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ , ΒΓ και ΑΓ , να αποδείξετε ότι το άθροισμα των μηκών των ημικυκλίων με διαμέτρους τα ΑΒ και ΒΓ είναι ίσο με το μήκος του ημικυκλίου με διάμετρο το ΑΓ.

Προτεινόμενη λύση

Το ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ έχει μήκος $\ell_{AB} = 2\pi\frac{AB}{2}\frac{180}{360} = \pi\frac{AB}{2}$

Το ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ έχει μήκος $\ell_{B\Gamma} = \pi\frac{B\Gamma}{2}$

Το άθροισμα των μηκών των δύο ημικυκλίων είναι

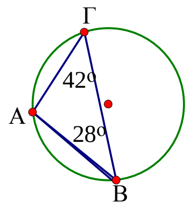
$$\ell_{AB} + \ell_{B\Gamma} = \pi\frac{AB}{2} + \pi\frac{B\Gamma}{2} = \frac{\pi AB + \pi B\Gamma}{2} = \frac{\pi(AB + B\Gamma)}{2} = \pi\frac{A\Gamma}{2}$$

Όμως $\pi\frac{A\Gamma}{2}$ είναι το μήκος του ημικυκλίου με διάμετρο το ΑΓ.

Άρα πράγματι $\ell_{AB} + \ell_{B\Gamma} = \ell_{A\Gamma}$

8.

Στο διπλανό σχήμα, η ακτίνα του κύκλου είναι 12 cm.



Να βρείτε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$

Προτεινόμενη λύση

Η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{B}$ είναι 28^o, οπότε το αντίστοιχό της τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$ είναι $\overset{\frown}{A\Gamma} = 56^o$

Με το ίδιο σκεπτικό είναι και $\overset{\frown}{AB} = 84^o$

Οπότε $\overset{\frown}{B\Gamma} = 360^o - 56^o - 84^o = 220^o$

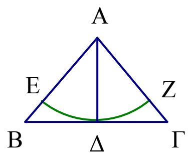
Άρα $\ell_{B\Gamma} = 2\pi\rho\dfrac{\mu}{360} = 2\cdot 3{,}14\cdot 12\ \dfrac{220}{360} = 46{,}05$ cm περίπου

9.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 2 cm και τη γωνία της κορυφής του να είναι διπλάσια από κάθε μία των προσκείμενων στην βάση του γωνιών. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΔ γράφουμε τόξο που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Να βρείτε το μήκος της γραμμής ΕΒΔΓΖΔΕ.

Προτεινόμενη λύση

Αν x είναι κάθε μία από τις προσκείμενες στη βάση γωνίες, τότε η γωνία της κορυφής είναι $\hat{A} = 2x$.



Όμως $2x + x + x = 180^o$ απ' όπου $x = 45^o$

Επομένως $\hat{A} = 90^o$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 4 + 4 = 8$ οπότε $B\Gamma = \sqrt{8}$

Στο ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση είναι και διάμεσος δηλαδή $B\Delta = \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$.

Και επειδή $\hat{B} = 45^o$ θα είναι και $B\hat{A}\Delta = 45^o$, πράγμα που σημαίνει ότι $A\Delta = B\Delta = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$

Κάθε ένα από τα τμήματα ΕΒ και ΓΖ είναι ίσο με $2 - \dfrac{\sqrt{8}}{2}$

και το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{E\Delta Z}$ είναι ίσο με $\ell = 2\cdot 3{,}14\cdot\dfrac{\sqrt{8}}{2}\ \dfrac{90}{360} = \dfrac{3{,}14\sqrt{8}}{4}$

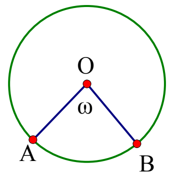
Οπότε το μήκος της γραμμής ΕΒΔΓΖΔΕ είναι ίσο με :

$$EB + B\Gamma + \Gamma Z + \ell_{E\Delta Z} = 2 - \frac{\sqrt{8}}{2} + \sqrt{8} + 2 - \frac{\sqrt{8}}{2} + \frac{3{,}14\sqrt{8}}{4} =$$

$$= 4 + \frac{3{,}14\sqrt{8}}{4}\ \text{cm}$$

10.

Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μέτρο της επίκεντρης γωνίας ω, αν το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι 3cm και το μήκος του κύκλου είναι 9 cm.



Προτεινόμενη λύση

$L = 2\pi\rho$ άρα $9 = 2\pi\rho$

$\ell_{AB} = 2\pi\rho\dfrac{\mu}{360}$ οπότε $3 = 9\,\dfrac{\mu}{360}$ απ’ όπου βρίσκουμε ότι $\mu = 120^o$

Επομένως $\omega = 120^o$